

УДК 532.5:551.465

## ВНУТРЕННИЕ ГРАВИТАЦИОННЫЕ ВОЛНЫ В ОКЕАНЕ С ФОНОВЫМИ СДВИГОВЫМИ ТЕЧЕНИЯМИ, ВОЗБУЖДАЕМЫЕ НЕСТАЦИОНАРНЫМИ ИСТОЧНИКАМИ

© 2025 г. В. В. Булатов<sup>1,\*</sup>, И. Ю. Владимиров<sup>2,\*\*</sup>, Е. Г. Морозов<sup>2,\*\*\*</sup>

Представлено академиком РАН М. В. Флинтотом 12.08.2024 г.

Поступило 12.08.2024 г.

После доработки 11.09.2024 г.

Принято к публикации 16.09.2024 г.

Рассмотрена задача о генерации внутренних гравитационных волн локализованным осциллирующим источником возмущений в океане конечной глубины с фоновыми сдвиговыми течениями. Для построения аналитических решений в линейном приближении использованы модельные представления частоты плавучести и распределения сдвигового течения по глубине. В предположении Майлса–Ховарда построено интегральное представление решения в виде сумм волновых мод. С помощью метода стационарной фазы получено асимптотическое представление решения для отдельной моды. Изучена пространственная трансформация фазовых структур волновых полей в зависимости от частоты осцилляций источника возмущений и основных характеристик сдвиговых течений. Показаны экспериментально измеренные сдвиговые потоки в абиссальных каналах, проведено сравнение с результатами лабораторного моделирования.

**Ключевые слова:** внутренние гравитационные волны, стратифицированный океан, фоновые сдвиговые течения, дальние поля, асимптотики, нестационарный источник

DOI: 10.31857/S2686739725010163 EDN: GVPVWO

В связи с прогрессом в изучении крупномасштабных океанических волновых процессов изучение динамики и распространения внутренних гравитационных волн (ВГВ) в океане с учетом наличия течений является актуальной задачей [2, 5, 10, 16, 20]. В реальном океане внутренние гравитационные волны распространяются на фоне фоновых сдвиговых океанических течений, поэтому вертикальная и горизонтальная динамика сдвиговых течений в значительной степени связана с этими волнами. В океане такие течения могут проявляться, например, в области сезонного термоклина и оказывать заметное

влияние на динамику ВГВ [16–18]. Интенсивными природными течениями являются потоки Антарктической донной воды, которые обтекают подводные хребты на абиссальных глубинах. Их скорости у дна нередко достигают 40–50 см/с [16–18]. Потоки донной воды, обтекая подводные хребты в проливах генерируют интенсивные внутренние волны, например в проливе Карские Ворота или Гибралтарском проливе [16–18]. Глубины в проливах меньше, чем в абиссальных разломах и меняются от десятков до сотен метров. Нестационарные или осциллирующие источники возмущений являются одним из механизмов генерации интенсивных внутренних гравитационных волн в природных (океан, атмосфера Земли) и искусственных стратифицированных средах. Такие источники возбуждения ВГВ могут иметь как природный (схлопывание области турбулентного перемешивания, быстрая подвижка океанического дна, распространение интенсивных атмосферных возмущений), так и антропогенный (подводные и надземные взрывы) характеры [2, 5, 6, 7, 19, 20]. Для моделирования генерации ВГВ

<sup>1</sup> Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского  
Российской Академии наук, Москва, Россия

<sup>2</sup> Институт океанологии им. П. П. Шишова Российской  
Академии наук, Москва, Россия

\* E-mail: internalwave@mail.ru

\*\* E-mail: iyuvladimirov@rambler.ru

\*\*\* E-mail: egmorozov@mail.ru

точечным источником в реальном океане можно считать крутой склон поперечного хребта в проливах, и в качестве возможного механизма возбуждения ВГВ рассматривать, например, генерацию волн периодическим течением на склонах поперечных хребтов в проливах [5, 16–18]. В первом приближении можно считать, что фоновые течения с вертикальным сдвигом скорости слабо зависят от времени и горизонтальных координат, поэтому если масштаб изменения течений по горизонтали много больше длин ВГВ, а масштаб временной изменчивости много больше периодов ВГВ, то такие течения можно рассматривать как стационарные и горизонтально однородные [2, 5, 10]. В общей постановке описание динамики ВГВ в океане с фоновыми полями сдвиговых течений является весьма сложной задачей уже в линейном приближении [2, 4, 5, 10, 15, 19, 20].

В приближении Буссинеска вертикальная компонента малых возмущений скорости ВГВ  $W$  удовлетворяет уравнению [2, 3, 5, 9]

$$\frac{D^2}{Dt^2} \left( \Delta + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) W - \frac{D}{Dt} \left( \frac{d^2 U}{dz^2} \frac{\partial W}{\partial x} + \frac{d^2 V}{dz^2} \frac{\partial W}{\partial y} \right) + N^2(z) \Delta W = \frac{D}{Dt} \left( \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{Dq}{Dt} \right) \right) \quad (1)$$

$$W = 0, \text{ при } z = 0, -H$$

$$\text{где } \frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + U(z) \frac{\partial}{\partial x} + V(z) \frac{\partial}{\partial y}, \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

$$N^2(z) = -\frac{g}{\rho^*} \frac{d\rho_0(z)}{dz} -$$

квадрат частоты Брента–Вяйсяля (частоты плавучести),  $(U(z), V(z), 0)$  – компоненты скорости фонового сдвигового течения на горизонте  $z$ ,  $\rho_0(z)$  – невозмущенная плотность,  $\rho^*$  – характерное значение плотности [2, 5],  $q = q(x, y, z, t)$  – плотность распределения источников. Задача (1) рассматривается в конечном по вертикали  $-H < z < 0$  и неограниченном по горизонтали  $-\infty < x, y < +\infty$  слое. На дне  $z = -H$  вертикальная компонента скорости  $W$  равна нулю, на поверхности  $z = 0$  используется приближение “твёрдой крышки”:  $W = 0$ , отфильтровывающее поверхностную моду, и мало влияющее на основные характеристики ВГВ [2, 5]. Далее предполагается выполненным условие устойчивости Майлса–Ховарда для числа Ричардсона:

$$Ri(z) = N^2(z) / \left( \left( \frac{dV}{dz} \right)^2 + \left( \frac{dU}{dz} \right)^2 \right) > 1/4,$$

это означает, что соответствующая спектральная задача не имеет комплексных собственных значений [4, 11, 14]. Характерные значения чисел Ричардсона в акваториях Мирового океана при отсутствии динамической неустойчивости фоновых сдвиговых течений могут находиться в интервалах от 2 до 20 [16–18]. Частота плавучести предполагается постоянной:  $N(z) = N = \text{const}$ . Фоновое сдвиговое течение – одномерное и линейное:

$$V(z) \equiv 0, U(z) = U_0 + \frac{U_0 - U_H}{H} z, U_0 = U(0),$$

$$U_H = U(-H).$$

Для числа Ричардсона выполнено условие устойчивости Майлса–Ховарда:

$$Ri = N^2 / \left( \frac{dU}{dz} \right)^2 = \frac{N^2 H^2}{(U_0 - U_H)^2} > \frac{1}{4}.$$

Рассматривается точечный гармонический источник массы, расположенный на глубине  $z_0$ :  $q(x, y, z, t) = Q \exp(i\omega t) \delta(x) \delta(y) \delta(z - z_0)$ ,  $Q = \text{const}$ ,  $\omega$  – частота осцилляций источника. Тогда на больших расстояниях от осциллирующего источника возмущений при  $r = \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \infty$  асимптотики решений вдоль некоторого направления  $S_\alpha$ , составляющего угол  $\alpha$  с положительным направлением оси  $Ox$ , строятся с помощью метода стационарной фазы [1, 2, 12]

$$W(x, y, z, z_0, t) = \sum_{n=1}^{\infty} W_n(x, y, z, z_0, t)$$

$$W_n(x, y, z, z_0, t) \sim$$

$$\sim \sum_{j=1}^{J(\alpha)} \frac{Q \exp \left( i \left( \omega t - \Theta_n(v_j^n, \omega) + \delta_j \right) \right) F_n(v_j^n, \omega, z, z_0)}{\sqrt{2\pi r} \chi_n(v_j^n, \omega) \frac{\partial B(\mu_n(v_j^n, \omega), v_j^n, \omega)}{\partial S_\alpha}}$$

$$\Theta_n(v, \omega) = \mu_n(v, \omega) x + v y,$$

$$F_n(v, \omega, z, z_0) = \frac{\varphi_n(\omega, v, z)}{d_n(\omega, v)} \left( \frac{df(z_0)}{dz_0} \frac{\varphi_n(\omega, v, z_0)}{\omega - f(z_0)} + \frac{\partial \varphi_n(\omega, v, z_0)}{\partial z_0} \right)$$

$$d_n(\omega, v) = \frac{\partial \varphi_0(\omega, \mu_n(v, \omega), v, -H)}{\partial \mu}$$

$$\frac{\partial \varphi_H(\omega, \mu_n(v, \omega), v, -H)}{\partial z}$$

$$B(\mu_n(v, \omega), v, \omega) =$$

$$= \varphi_0(\omega, \mu_n(v, \omega), v, -H) \frac{\partial \varphi_H(\omega, \mu_n(v, \omega), v, -H)}{\partial z}$$

$$\chi_n(v, \omega) = \left| \frac{\partial^2 \mu_n(v, \omega)}{\partial v^2} \right| \left( 1 + \left( \frac{\partial \mu_n(v, \omega)}{\partial v} \right)^2 \right)^{-3/2},$$

где

$$\varphi_n(\omega, v, z) = \varphi_0(\omega, \mu_n(v, \omega), v, z) =$$

$$= \varphi_H(\omega, \mu_n(v, \omega), v, z), \mu_n(v, \omega) -$$

собственные функции и собственные значения вертикальной спектральной задачи, которые выражаются через модифицированные функции Бесселя мнимого индекса [3, 9],  $f(z) = \mu_n(v, \omega)U(z)$ ,  $v_j^n = v_j^n(\alpha)$ ,  $j = 1, 2, \dots, J(\alpha)$  — все такие действительные корни уравнения  $\frac{\partial \mu_n(v, \omega)}{\partial v} = -\text{tg} \pm$  для которых соответствующие стационарные точки  $(v_j^n, \mu_n(v_j^n, \omega))$  фазовой функции  $\sim n(v_j^n, \omega)$  лежат на кривой  $l_n^+(\alpha)$ ,  $\chi_n(v, \omega)$  — кривизна этой кривой. Фазовый сдвиг  $\delta_j$  равен  $-\frac{\pi}{4}$  или  $-\frac{3\pi}{4}$  в зависимости от того, обращена ли кривая  $l_n^+(\alpha)$  в точке  $v_j^n(\alpha)$  выпуклостью и вогнутостью к выбранному направлению  $S_\alpha$ . Асимптотика стационарной фазы становится неприменимой вблизи соответствующих волновых фронтов (каустики), поскольку каждая каустика порождается некоторой точкой перегиба соответствующей дисперсионной кривой, то есть такой точкой, в которой кривизна этой кривой обращается в ноль [1, 2, 12].

Для численных расчётов были использованы две модели линейных сдвиговых течений, характерных для условий Мирового океана: однонаправленное (сдвиговое течение не меняет направление своего распространения на всей глубине океана) и разнонаправленное (придонное и приповерхностное течения разнонаправлены). Число Ричардсона для использованных моделей течений равно  $Ri = 25$ , расчёты приведены для первой волновой моды. На рис. 1 представлены результаты расчётов линий равной фазы (сплошные линии) и волновых фронтов (штриховые линии) для однонаправленного сдвигового течения, на рис. 2 для разнонаправленного течения.

Как показывают численные расчёты, вариативность, неоднозначность и качественное разнообразие получаемых дисперсионных

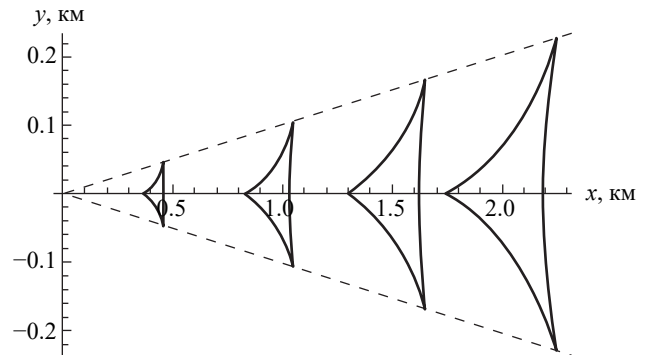


Рис. 1. Волновая картина распространяющихся волн от источника в положительном направлении оси  $Ox$ , два волновых фронта при  $x > 0$

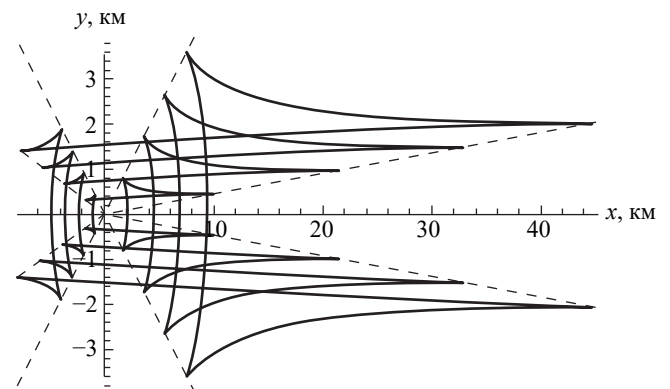
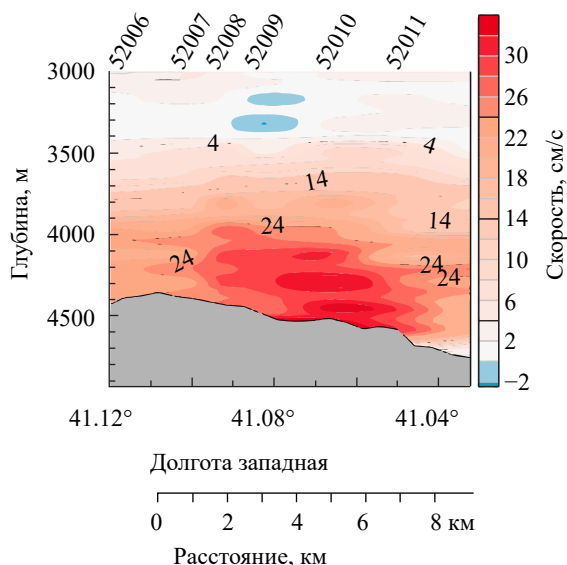


Рис. 2. Волны от источника во всех направлениях; два волновых фронта при  $x > 0$ , два волновых фронта при  $x < 0$

соотношений определяют характер генерации различных типов волн. В частности, при относительно малых частотах осцилляций источника возбуждаются только кольцевые (поперечные) волны, причём в некоторых случаях одновременно может возбуждаться более двух волновых пакетов таких волн. Число одновременно возбуждаемых волновых пакетов определяется общим количеством отдельных ветвей дисперсионных кривых. При больших значениях частоты генерируются только продольные (клиновидные) волны двух типов, причём при увеличении значения частоты осцилляции угол полураствора волновых фронтов уменьшается. Можно также отметить, что существуют такие значения частоты, при которых угол полураствора волнового фронта близок к  $90^\circ$ . Поэтому при этих значениях частоты, в силу многозначности дисперсионных соотношений, волновая картина возбуждаемых полей представляют собой сложную волновую систему,

обладающих одновременно как свойствами продольных, так и поперечных волн. Для определённых типов волновых пакетов увеличение фазы ведёт к приближению соответствующей линии равной фазы к началу координат (положению источника возмущений), а для других типов волн — к удалению от него. Для разнонаправленного типа течений получена волновая картина в виде волнового креста, в этом случае все волновые колебания, распространяющиеся от источника возмущений, могут быть локализованы внутри волновых фронтов (каустики).

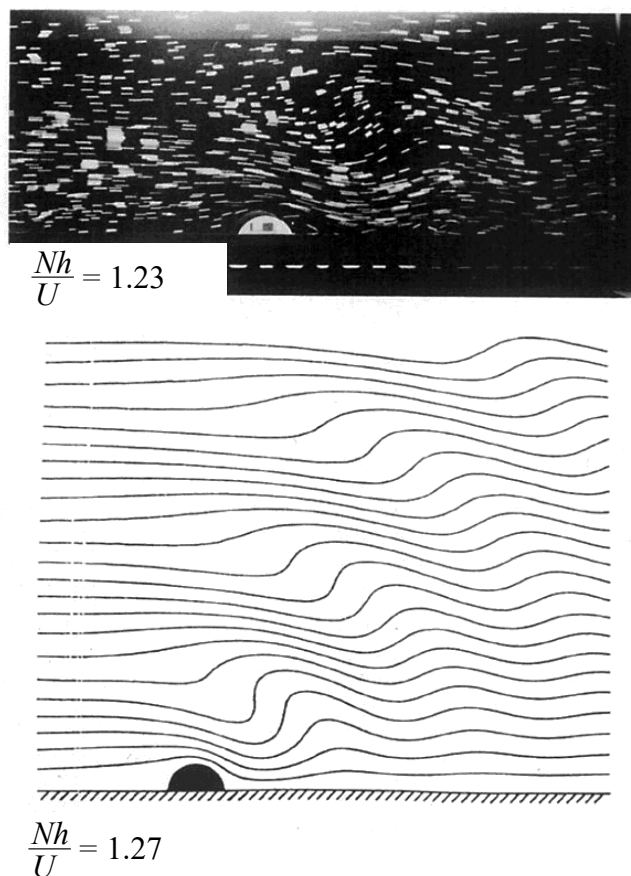
Сильные придонные течения в океане наблюдаются в разломе Вима в Срединно Атлантическом хребте на  $11^\circ$  с. ш. [16–18]. На меридиане около  $41^\circ$  з. д. придонный поток со скоростями около 15–20 см/с обтекает подводный хребет, расположенный поперёк разлома. Далее поток плотной Антарктической донной воды устремляется вниз по склону на протяжении около 8 км, поток при скатывании вниз разгоняется и после опускается по высоте около 250–300 м. По данным измерений поток на глубине 4000–4500 м разгоняется до 39 см/с и потом замедляется, поскольку его кинетической энергии недостаточно, чтобы преодолеть стратификацию (рис. 3).



**Рис. 3.** Измеренное поле скорости вдоль абиссального разлома Вима в тропической Атлантике при обтекании потоком донной воды поперечного подводного хребта. Цифры на верхней оси показывают номера станций профилирования течений опускаемым доплеровским профилографом течений. Максимальные скорости потока на восток (слева направо) наблюдаются после скатывания течения вниз по склону

В [7, 8, 13, 15] обтекание подводных препятствий моделировалось в лабораторных опытах, были проведены численные расчёты и предложены теоретические оценки параметров ВГВ, которые генерируются при обтекании.

В [7, 8, 13, 15] приведены примеры лабораторного моделирования для нескольких параметров обтекания, а также показан численный расчёт внутренних колебаний, которые возникают при таком обтекании. Структура потока в их постановке задачи и эксперимента зависит от безразмерного числа  $Nh/U$ , где  $h$  — высота препятствия,  $U$  — максимальное значение скорости сдвигового потока. По результатам полученных оценок при  $0.5 < Nh/U < 2$  возникают распространяющиеся столбообразные (columnar) возмущения. На рис. 4 показаны линии тока течений при лабораторном и численном моделировании для различных значений параметра  $Nh/U$ . Имеющиеся измерения в океане соответствуют диапазону безразмерного



**Рис. 4.** Лабораторное моделирование (вверху) и численный расчёт (внизу) обтекания потоком подводного препятствия для значений параметра  $Nh/U$ , близких к наблюдаемым в океане



параметра, предложенному в [7, 8]: частота Брента–Вяйсяля на глубине 4000–4500 м равна  $N = 0.002 \text{ с}^{-1}$ , максимальная скорость сдвигового потока 0.39 м/с, обтекаемое препятствие высотой  $h = 250\text{--}300$  м [16–18]. Тогда диапазон значений безразмерного параметра  $Nh / U$  будет составлять  $1.28 \div 1.53$ .

Таким образом, полученные асимптотические результаты с различными значениями входящих в них физических параметров позволяют провести оценку характеристик ВГВ, наблюдаемых в реальных океанических условиях с течениями, а также рассчитывать волновые поля, в том числе, и от нелокальных источников возмущений различной физической природы. В результате проведения модельных многовариантных расчётов смоделированная волновая система может быть приближена к наблюдаемым в натурных и лабораторных условиях волновым картинам, что даёт возможность оценить физические параметры реальных источников генерации ВГВ в морской среде и определить основные характеристики начальных возмущений, варьируя модельные значения исходных параметров.

#### ИСТОЧНИКИ ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена по теме государственного задания № FFGN–2024–0005 (В.В. Булатов), № FMWE–2024–0016 (И.Ю. Владимиров, Е.Г. Морозов). Данные измерений получены в рейсах судов ИО РАН при поддержке гранта РНФ № 21–77–20004.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Арнольд А. И. Волновые фронты и топологии кривых. М.: Фазис, 2002. 118 с.
2. Булатов В. В., Владимиров Ю. В. Волны в стратифицированных средах. М.: Наука, 2015. 735 с.
3. Булатов В. В., Владимиров И. Ю., Морозов Е. Г. Генерация внутренних гравитационных волн в океане при набегании фонового сдвигового течения на подводную возвышенность // Доклады РАН. Науки о Земле. 2022. Т. 505. № 2. С. 192–195.
4. Гаврильева А. Г., Губарев Ю. Г., Лебедев М. П. Теорема Майлса и новые частные решения уравнения Тейлора–Гольдштейна // Ученые записки Казанского университета. Серия физико–математические науки. 2016. Т. 158(2). С. 156–171.
5. Мировольский Ю. З. Динамика внутренних гравитационных волн в океане. Л.: Гидрометеоиздат, 1981. 302 с.
6. Слепышев А. А. Вертикальный перенос импульса инерционно–гравитационными внутренними волнами на двумерном сдвиговом течении // Морской гидрофизический журнал. 2021. Т. 37. № 4. С. 279–287.
7. Baines P. G. Mixing in downslope flows in the ocean – plumes versus gravity currents // Atmosphere–Ocean. 2008. V. 46(4). P. 405–419.
8. Baines P. G., Hoinka K. P. Stratified flow over two-dimensional topography in fluid of infinite depth: a laboratory simulation // J. Atmospheric Sciences. 1985. V. 42 (15). P. 1614–1630.
9. Bulatov V. V., Vladimirov Yu. V. Dynamics of internal gravity waves in the ocean with shear flows // Russian J. Earth Sciences. 2020. V. 20. ES4004.
10. Fabrikant A. L., Stepanyants Yu. A. Propagation of waves in shear flows. World Scientific Publishing, 1998. 304 p.
11. Howland C. J., Taylor J. R., Caulfield C. P. Shear–induces breaking of internal gravity waves // J. Fluid Mechanics. 2021. V. 921. A24.
12. Kravtsov Yu., Orlov Yu. Caustics, catastrophes and wave fields. Berlin: Springer, 1999. 210 p.
13. Long R. R. Some aspects of the flow of stratified fluids II I. Continuous density gradients // Tellus. 1955. V. 7. P. 341–357.
14. Miles J. W. On the stability of heterogeneous shear flow // J. Fluid Mech. 1961. V. 10 (4). P. 495–509.
15. Meunier P., Dizus S., Redekopp L., Spedding G. Internal waves generated by a stratified wake: experiment and theory // J. Fluid Mech. 2018. V. 846. P. 752–788.
16. Morozov E. G. Oceanic internal tides. Observations, analysis and modeling. Berlin: Springer, 2018. 317 p.
17. Morozov E. G., Frey D. I., Zuev O. A., Makarenko N. I., Seliverstova A. M., Mekhova O. S., Krechik V. A. Antarctic Bottom Water in the Vema Fracture Zone // J. Geophys. Res. 2023. V. 128. e2023JC019967.
18. Morozov E. G., Kozlov I. E., Shchuka S. A., Frey D. I. Internal tide in the Kara Gates Strait // Oceanology. 2017. V. 57 (1). P. 8–18.
19. Shugan I., Chen Y.–Y. Kinematics of the ship’s wake in the presence of a shear flow // J. Mar. Sci. Eng. 2021. V. 9. P. 7.
20. Vallis G. K. Atmospheric and oceanic fluid dynamics. Cambridge University Press, 2006. 758 p.

# INTERNAL GRAVITY WAVES IN THE OCEAN WITH SHEAR FLOWS EXCITED BY NON-STATIONARY SOURCES

© 2025 V. V. Bulatov<sup>a,#</sup>, I. Yu. Vladimirov<sup>b,##</sup>, E. G. Morozov<sup>b,###</sup>

Presented by Academician of the RAS M.V. Flint August 12, 2024

<sup>a</sup>*Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

<sup>b</sup>*Shirshov Oceanology Institute, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

<sup>#</sup>*E-mail: internalwave@mail.ru*

<sup>##</sup>*E-mail: iyuvladimirov@rambler.ru*

<sup>###</sup>*E-mail: egmorozov@mail.ru*

The problem of internal gravity wave generation by a localized oscillating disturbance source in the ocean of finite depth with background shear currents is considered. Model representations of the buoyancy frequency and the shear current distribution by depth are used to construct analytical solutions in the linear approximation. Under the Miles–Howard assumption, an integral representation of the solution is constructed as a sum of wave modes. Using the stationary phase method, an asymptotic representation of the solution for an individual mode is obtained. The spatial transformation of the phase structures of wave fields is studied depending on the oscillation frequency of the disturbance source and the main characteristics of the shear currents. Experimentally measured shear flows in abyssal channels are shown and compared with the results of laboratory modeling.

*Keywords:* internal gravity waves, stratified ocean, shear flows, far fields, asymptotics, non-stationary source